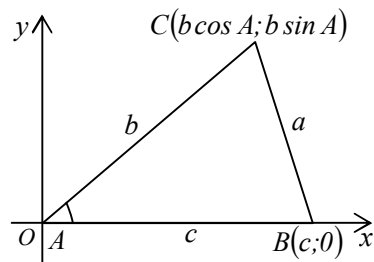


Теорема косинусов

Теорема. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = a$,
 $AC = b$, $AB = c$.

Доказать:
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Доказательство

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка A совпала с началом координат, точка B лежала на положительной полуоси Ox , а точка C имела положительную ординату, тогда вершины треугольника будут иметь координаты $A(0; 0)$, $B(c; 0)$, $C(b \cos A; b \sin A)$.

По формуле расстояния между двумя точками

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ получаем:}$$

$$BC^2 = a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A - 0)^2,$$

$$a^2 = b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A,$$

$$a^2 = b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Итак, квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Ч.т.д.

Теорема косинусов впервые была доказана в Средней Азии ученым-математиком **аль-Бируни (973–1048)**. Ее иногда называют обобщенной теоремой Пифагора. Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора. Действительно, если в $\triangle ABC \angle A = 90^\circ$, то $\cos A = \cos 90^\circ = 0$, то доказанное равенство переписывается в виде $a^2 = b^2 + c^2$, т.е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.